Concours Centrale - Supélec 1998

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière TSI

Le but du problème est la définition et l'étude de certaines fonctions. Cette étude est suivie d'une application relative au pendule simple.

Notations

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- Si f est une fonction réelle de la variable réelle, f^2 désigne la fonction : $x \mapsto f(x)^2$.
- $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ désigne l'ensemble des applications de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ où n et p sont deux entiers naturels non nuls.
- k désigne un élément fixé de l'intervalle $[0;1[$ de $\mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaire

I.A - Soit l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivante : $(u, v) \mapsto \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v)\right)$. Démontrer que ϕ est bijective et définir son application réciproque ϕ^{-1}.

I.B - Pour toute application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, on note g l'application composée $f \circ \phi$.

I.B.1) Démontrer que f est dans $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ si et seulement si g y est également.

I.B.2) Exprimer dans le cas où f est dans $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ les dérivées partielles premières de g

$$\frac{\partial g}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial v},$$

en fonction de celles de f

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}.$$

I.B.3) En déduire l'ensemble E suivant : $E = \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) / \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \right\}$.

I.C - Démontrer que si f est dans $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = f(y, x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$$

alors il existe α dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \alpha(x + y)$.

Partie II -

II.A - Définition d'une certaine bijection

II.A.1) Démontrer que l'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ existe pour tout x de l'intervalle $[0;1[$.

II.A.2) On note désormais, pour tout x de l'intervalle $[0;1[$, $\mathrm{ArcS}(x)$ cette intégrale. Démontrer qu'on définit ainsi une bijection ArcS de $[0;1[$ sur $[0;\mathrm{ArcS}(1)[$.

II.B - Étude de la dérivabilité de la bijection réciproque et de deux autres fonctions

On note S la bijection réciproque de ArcS, on pose $C = \sqrt{1-S^2}$ et $D = \sqrt{1-k^2S^2}$. On note T le réel $\mathrm{ArcS}(1)$.

II.B.1) Démontrer que S est dérivable sur $[0;T[$ et que l'on a : $S' = CD$.

II.B.2) Étudier la dérivabilité des fonctions D et C et exprimer leurs dérivées à l'aide de S, C et D.

II.C - Définition des fonctions s, c et d

II.C.1) Démontrer qu'il existe une et une seule fonction s définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant simultanément les trois propriétés suivantes :

- s est impaire,
- s est $2T$-antipériodique (c'est-à-dire qu'elle vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $s(x + 2T) = -s(x)$),
- $\forall x \in [0;T[$, $s(x) = S(x)$.

II.C.2) On définit de même la fonction c par les propriétés suivantes :

- c est paire,
- c est $2T$-antipériodique,
- $\forall x \in [0;T[$, $c(x) = C(x)$

et la fonction d par les propriétés suivantes :

- d est paire,
- d est $2T$-périodique,
- $\forall x \in [0;T[$, $d(x) = D(x)$.

On ne demande pas de prouver l'existence et l'unicité des fonctions c et d ainsi définies. Démontrer les relations suivantes : $1 - s^2 = c^2$ et $1 - k^2s^2 = d^2$.

II.C.3) Reconnaître les fonctions s, c et d dans le cas particulier $k = 0$. Dans toute la suite du problème on suppose k dans $]0;1[$.

II.D - Dérivabilité de s, c et d

II.D.1) Démontrer que s, c et d sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exprimer s', c' et d' à l'aide de s, c et d.

II.D.2) Démontrer que s, c et d sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.

II.E - Déterminer les développements limités à l'ordre 3 en 0 de s, c et d.

II.F - Formules d'addition et quelques valeurs prises par s, c et d

II.F.1) Démontrer :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ s(x+y) = \frac{s(x)(cd)(y) + s(y)(cd)(x)}{1 - k^2s^2(x)s^2(y)}.$$

II.F.2) On établit de même et on l'admettra ici les formules :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ c(x+y) = \frac{c(x)c(y) - (sd)(x)(sd)(y)}{1 - k^2s^2(x)s^2(y)}$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ d(x+y) = \frac{d(x)d(y) - k^2(sc)(x)(sc)(y)}{1 - k^2s^2(x)s^2(y)}$$

Calculer pour tout x de $\mathbb{R}$, $s(T - x)$, $c(T - x)$ et $d(T - x)$ à l'aide de $s(x)$, $c(x)$ et $d(x)$. En déduire les réels $d(T/2)$, $s(T/2)$ et $c(T/2)$ que l'on exprimera en fonction de k' avec : $k' = \sqrt{1 - k^2}$.

Partie III :

Dans cette partie on écrit T comme la somme d'une série et on en déduit une méthode de calcul de la période du pendule simple.

III.A - Calcul d'une intégrale

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $w_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$. Établir une relation entre w_{n+2} et w_n et en déduire une expression, pour tout n de $\mathbb{N}$, de w_{2n} à l'aide de factorielles, d'une puissance de 2 et du nombre π.

III.B - Une nouvelle expression de T

III.B.1) Démontrer : $T = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}\,d\theta$.

III.B.2) En déduire :

$$T = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_{2n}k^{2n}\sin^{2n}\theta\right)d\theta.$$

III.B.3) En admettant la possibilité d'une intégration terme à terme dans l'expression précédente, démontrer :

$$T = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n k^{2n}$$

où les a_n sont des rationnels à préciser.

III.C - Période du pendule simple

On démontre en physique et on l'admet ici que dans un système d'unités bien choisi la période $P(\theta_0)$ du pendule simple est donnée par l'expression ci-dessous, où θ_0 est une constante fixée dans $]0;\pi[$ et dépendant des conditions initiales du mouvement du pendule.

$$P(\theta_0) = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}.$$

III.C.1) Justifier l'existence de l'intégrale donnant $P(\theta_0)$.

III.C.2) Démontrer, à l'aide du changement de variable $u = \sin\frac{\theta}{2}/\sin\frac{\theta_0}{2}$, que $P(\theta_0)$ est le nombre T obtenu quand on choisit $k = \sin(\theta_0/2)$.

III.C.3) On pose :

$$u_n(\theta_0) = \frac{((2n)!)^2}{2^{4n}(n!)^4}\sin^{2n}\frac{\theta_0}{2}.$$

Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}(\theta_0)}{u_n(\theta_0)} \le \sin^2\frac{\theta_0}{2}$$

et en déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{j=n+1}^{+\infty} u_j(\theta_0) \le u_n(\theta_0)\tan^2\frac{\theta_0}{2}.$$

III.C.4) Soit ε un réel strictement positif. Déduire de ce qui précède une méthode de calcul d'une valeur approchée à ε près de la période du pendule simple, θ_0 étant supposé connu. Donner la valeur obtenue pour $\theta_0 = \pi/2$ et $\varepsilon = 10^{-3}$.

III.C.5) Calculer la limite de $P(\theta_0)$ quand θ_0 tend vers 0.

••• FIN •••